

# Condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique

Ce problème porte sur la condensation de Bose-Einstein de gaz atomiques. Dans l'énoncé, l'abréviation C.B.E. sera utilisée pour évoquer cette condensation. Les premiers résultats théoriques concernant la C.B.E. ont été obtenus par Einstein au début du vingtième siècle sur un gaz parfait d'atomes dans une boîte. La C.B.E. en milieu dilué a été observée expérimentalement par une équipe américaine en 1995 dans un gaz d'atomes de rubidium piégés. Cette équipe a reçu le prix Nobel de Physique en 2001 pour ces résultats expérimentaux spectaculaires.

Ce problème comporte deux parties très largement indépendantes.

La première partie traite du refroidissement d'atomes neutres par laser et de leur piégeage dans un champ magnétique inhomogène. Les résultats sont obtenus à l'aide d'un formalisme classique, sans faire appel à la mécanique quantique. A la fin de cette partie, le piégeage des atomes par un champ magnétique peut être traité de manière indépendante du reste du problème.

Dans la seconde partie, les aspects thermodynamiques de la C.B.E. sont abordés pour un gaz d'atomes piégés dans un piège magnétique harmonique isotrope. Quelques propriétés des condensats de Bose sont étudiées à la fin de cette partie.

*Un feuillet séparé de l'énoncé, à rendre avec les copies, est destiné au graphe demandé à la question 2.1.7 de la seconde partie du problème.*

## Valeurs numériques de constantes fondamentales :

- Permittivité diélectrique du vide .....  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- Vitesse de la lumière dans le vide .....  $c = 2,99 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Constante de Planck .....  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
- Constante de Boltzmann .....  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
- Valeur absolue du magnéton de Bohr .....  $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J.T}^{-1}$
- Masse de l'électron .....  $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
- Charge de l'électron .....  $q = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

**Valeurs numériques associées au rubidium :** dans ce problème, sauf indication contraire, les applications numériques seront effectuées en utilisant les valeurs suivantes, associées aux atomes de rubidium :

- Masse d'un atome de rubidium .....  $M = 1,42 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$
- Longueur d'onde des lasers utilisés pour refroidir les atomes .....  $\lambda = 780 \text{ nm}$
- Largeur radiative .....  $\Gamma/2\pi \simeq 6 \text{ MHz}$
- Intensité de saturation pour la transition utilisée .....  $I_{\text{sat}} = 1,6 \text{ mW.cm}^{-2}$

## Formulaire :

### Opérateurs :

- En coordonnées cylindriques  $(\rho, \phi, z)$  :

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho A_z)}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\rho \partial A_\phi}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_z.$$

- En coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  :

$$\operatorname{grad} A = \frac{\partial A}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

- $\operatorname{div}(a\mathbf{V}) = a \operatorname{div}(\mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \operatorname{grad}(a)$
- $\operatorname{rot}(a\mathbf{V}) = \operatorname{grad}(a) \wedge \mathbf{V} + a \operatorname{rot}(\mathbf{V})$

### Fonctions de Bose

- Les fonctions de Bose sont notées  $g_\alpha(z)$  ( $\alpha > 1$ ). Elles sont définies sur l'intervalle  $[0, 1]$ , sur lequel elles sont *croissantes*, par :

$$g_\alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^\alpha}.$$

Elles ont les propriétés suivantes :

- $g_\alpha(z) \sim z$  pour  $z \ll 1$
- $z \frac{d(g_\alpha(z))}{dz} = g_{\alpha-1}(z)$ ; ( $\alpha > 1$ )
- $g_2(1) = 1,64$ ,  $g_3(1) = 1,20$ ,  $g_4(1) = 1,08$

### Intégrales utiles :

$$\int_0^\infty u e^{-u} du = 1, \quad \int_0^\infty u^2 e^{-u} du = 2$$

$$\int_{-\infty}^\infty u^2 \exp(-au^2) du = -\frac{d}{da} \left( \int_{-\infty}^\infty \exp(-au^2) du \right) = -\frac{d}{da} \left( \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)$$

### Développements en séries entières :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

### Une relation utile :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

## Première partie

# Ralentissement, refroidissement et piégeage d'atomes neutres

## 1 Forces radiatives

On considère un atome de masse  $M$ , immobile en  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ , origine d'un repère  $Oxyz$  matérialisant un référentiel supposé galiléen. Cet atome interagit avec un champ laser associé à un champ électrique  $\mathbf{E}$ , de pulsation  $\omega$  et polarisé rectilignement suivant le vecteur  $\mathbf{e}_x$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_x.$$

L'atome est supposé équivalent à un dipôle électrique induit, oscillant à la pulsation  $\omega$  du champ, et de moment dipolaire :

$$\mathbf{p} = q \mathbf{r},$$

parallèle à  $\mathbf{e}_x$ , la charge  $q$  en  $\mathbf{r}$  oscillant autour de la charge  $-q$  placée en  $\mathbf{R}$ . Dans toute la suite, on supposera que  $\|\mathbf{r}\| \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ , et on notera :

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}_x.$$

La moyenne temporelle d'une grandeur périodique  $A$  de période  $T$  est définie par :

$$\langle A(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A(\mathbf{r}, t) dt.$$

### 1.1 Expression de la force moyenne s'appliquant sur l'atome

#### 1. Force électrique :

- Donner l'expression des forces électriques  $\mathbf{F}_q$  et  $\mathbf{F}_{-q}$  exercées par  $\mathbf{E}$  sur les charges  $q$  et  $-q$  en fonction de  $q$ ,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{E}(\mathbf{0}, t)$ .
- En effectuant un développement limité au voisinage de  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ , montrer que la force électrique qui s'applique sur l'atome est donnée par :

$$\mathbf{F}_{\text{el}}(\mathbf{R}, t) = (\mathbf{p} \cdot \text{grad})_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

#### 2. Force magnétique :

- Montrer qu'à l'ordre le plus bas en  $\|\mathbf{r}\|/\lambda$ , la force magnétique qui s'exerce sur l'atome s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{m}}(\mathbf{R}, t) = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{R}, t).$$

- En déduire l'expression suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{m}}(\mathbf{R}, t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{R}, t)) + (\mathbf{p} \wedge \text{rot}\mathbf{E})_{\mathbf{r}=\mathbf{R}},$$

et montrer que la force magnétique peut également s'écrire, en remarquant que le champ  $\mathbf{E}$  est porté par  $\mathbf{e}_x$  :

$$\mathbf{F}_{\text{m}}(\mathbf{R}, t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{R}, t)) - (\mathbf{p} \cdot \text{grad})_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} \mathbf{E} + (p \text{ grad}E)_{\mathbf{r}=\mathbf{R}}.$$

- En déduire l'expression de la force totale moyenne  $\mathcal{F} = \langle \mathbf{F}_{\text{el}} + \mathbf{F}_{\text{m}} \rangle$  qui s'exerce sur l'atome :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{R}) = \langle (p \text{ grad}E)_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} \rangle.$$

## 1.2 Force dipolaire, force de pression de radiation

On suppose le champ électrique  $\mathbf{E}$  en  $\mathbf{r}$  de la forme :

$$\mathbf{E} = E_0(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x \cos[\omega t + \Phi(\mathbf{r})].$$

Il est associé au champ complexe  $\mathcal{E}$  (c'est-à-dire que  $\mathbf{E} = \mathcal{R}e(\mathcal{E})$ ) :

$$\mathcal{E} = E_0(\mathbf{r}) \mathbf{e}_x e^{i[\omega t + \Phi(\mathbf{r})]}.$$

De la même façon, on associe au dipôle  $\mathbf{p}$  un dipôle complexe  $\mathcal{P}$  (c'est-à-dire que  $\mathbf{p} = \mathcal{R}e(\mathcal{P})$ ). On définit la polarisabilité complexe de l'atome  $\alpha = \alpha' - i\alpha''$  par la relation :

$$\mathcal{P} = \epsilon_0 \alpha \mathcal{E}.$$

1. *Décomposition de la force moyenne* : montrer que la force moyenne  $\mathcal{F}$  qui s'exerce sur l'atome se décompose en deux forces :

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2, \quad \text{avec} \quad \mathcal{F}_1 = -\frac{\epsilon_0 \alpha''}{2} E_0^2 \mathbf{grad} \Phi \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2 = \frac{\epsilon_0 \alpha'}{2} E_0 \mathbf{grad} E_0.$$

2. *Expression de la polarisabilité* : le modèle de l'électron élastiquement lié permet d'estimer la polarisabilité  $\alpha$  et donc de donner une expression complète des forces radiatives. Dans ce modèle, l'électron est lié à l'atome par une force de rappel de constante de raideur  $k = m\omega_0^2$ , où  $m$  est la masse de l'électron. Il subit une force de frottement de type fluide :

$$-m\Gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (0 < \Gamma \ll \omega_0).$$

Le coefficient,  $\Gamma$ , appelé largeur radiative, est homogène à une fréquence. L'électron est de plus soumis au champ électrique  $\mathbf{E}$  associé au champ laser, et on appelle désaccord  $\delta$  la différence entre la pulsation du laser et la pulsation propre de l'oscillateur :

$$\delta = \omega - \omega_0.$$

Dans toute la suite, on se place au voisinage de la résonance, c'est-à-dire dans une situation pour laquelle  $|\delta| \ll \omega_0$ .

- (a) Donner l'équation différentielle du second ordre vérifiée par le dipôle atomique  $\mathcal{P}$  soumis au champ  $\mathcal{E}$ .
- (b) En déduire que, dans ce modèle et sous l'hypothèse  $|\delta| \ll \omega_0$ , la polarisabilité est donnée par :

$$\alpha = -\frac{\alpha_0}{2} \frac{\omega_0 \delta}{\delta^2 + \Gamma^2/4} - i \frac{\alpha_0}{2} \frac{\omega_0 \Gamma/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} = \alpha' - i\alpha'' \quad \text{avec} \quad \alpha_0 = \frac{q^2}{m\epsilon_0 \omega_0^2}.$$

- (c) Donner la valeur numérique, la dimension et une interprétation physique de  $\alpha_0$ . On donne  $\lambda_0 = 780$  nm pour la transition concernée, les valeurs numériques des constantes fondamentales sont données en préambule à l'énoncé.
  - (d) Pourquoi ce modèle est-il adapté à l'étude des atomes alcalins (sodium, potassium, rubidium, césium,...) qui sont souvent utilisés dans les expériences de refroidissement laser ? Par ailleurs, pourquoi ces atomes ont-ils été choisis pour mener ces expériences ?
3. *Atome immobile dans une onde plane* : on suppose que l'atome est plongé dans une onde électromagnétique plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , c'est-à-dire que le champ  $\mathbf{E}$  est donné par  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ .

- (a) Montrer que la force  $\mathcal{F}$  se résume à la force  $\mathcal{F}_1$ , et donner son expression en fonction de  $\alpha''$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\mathbf{k}$  et  $E_0$ .
- (b) *Interprétation corpusculaire de la force :*
- i. Etablir les expressions suivantes pour la puissance moyenne  $P$  reçue par le dipôle à l'ordre le plus bas en  $\|\mathbf{r}\|/\lambda$  :

$$P = \left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}, t) \right\rangle = \alpha'' \frac{\epsilon_0 \omega E_0^2}{2}.$$

- ii. En supposant que cette puissance moyenne correspond à un nombre  $N_p$  de photons laser absorbés par unité de temps, donner l'expression de  $N_p$ .
  - iii. En déduire l'expression de  $\mathcal{F}$  en fonction de  $N_p$  et  $\hbar\mathbf{k}$ .
  - iv. Pour interpréter l'expression précédente, on considère que chaque photon du champ laser absorbé par l'atome est ré-émis de manière spontanée. Cette émission spontanée est équiprobable dans deux directions opposées. A partir de ces indications et à l'aide d'un bilan de quantité de mouvement entre atome et photons, montrer que l'on retrouve l'expression précédente de  $\mathcal{F}$  pour la force exercée par une onde plane sur l'atome.
- (c) *Expression de la force en fonction des données expérimentales :*
- i. Donner l'expression de l'intensité  $I$  du laser modélisé par une onde plane en fonction de  $E_0$ ,  $\epsilon_0$  et  $c$ , célérité de la lumière dans le vide.
  - ii. Montrer que la force  $\mathcal{F}$  qui s'exerce sur un atome s'écrit :

$$\mathcal{F} = \hbar\mathbf{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{I}{I_{\text{sat}}} \frac{\Gamma^2/4}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \quad \text{avec} \quad I_{\text{sat}} = \frac{\Gamma^2 \hbar c}{2\alpha_0 \omega_0}. \quad (1)$$

La grandeur  $I_{\text{sat}}$ , homogène à une intensité, est appelée intensité à saturation de la transition atomique considérée.

- iii. Donner une interprétation physique au temps  $\tau$  défini par :

$$\frac{\|\mathcal{F}\|}{\hbar k} = \frac{1}{\tau}.$$

- iv. Proposer une interprétation physique au coefficient  $\Gamma$ , en se plaçant par exemple à résonance ( $\delta = 0$ ) et à  $I = I_{\text{sat}}$  (transition atomique saturée). On pourra considérer que l'atome, lorsqu'il absorbe un photon, passe d'un état interne fondamental  $f$  à un état excité  $e$ , et relier  $\Gamma$  à une caractéristique physique de l'état  $e$ .
  - v. Comparer  $\|\mathcal{F}\|$  à l'action de la pesanteur sur un atome de rubidium, en se plaçant à nouveau à résonance ( $\delta = 0$ ) et à  $I = I_{\text{sat}}$ . On donne pour le rubidium  $M = 1,42 \cdot 10^{-25}$  kg,  $\Gamma/2\pi = 6$  MHz,  $\lambda = 780$  nm.
- (d) Pourquoi nomme-t-on cette force "pression de radiation" ? Connaissez-vous un phénomène naturel où les effets de cette force sont visibles ?

## 2 Ralentissement et refroidissement d'atomes par laser

### 2.1 Ralentissement des atomes

Dans cette partie, on souhaite agir sur un jet d'atomes de rubidium en utilisant un faisceau laser opposé au jet. On supposera que les atomes sont soumis au champ électrique  $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{e}_x \cos(\omega t + kz)$  associé au champ laser.

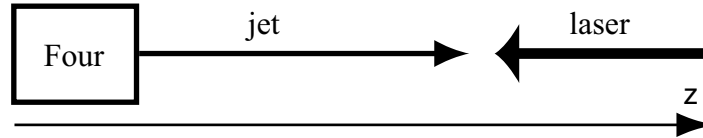


FIG. 1 – Jet atomique ralenti par laser

1. Donner l'ordre de grandeur de la vitesse  $v_T$  des atomes de rubidium sortant du four, si la température à l'intérieur est de l'ordre de  $100^\circ\text{C}$ . On rappelle la valeur de la masse d'un atome de rubidium  $M = 1,42 \cdot 10^{-25}$  kg.
2. Ces atomes se déplaçant, la pulsation  $\omega$  du laser leur apparaît décalée.
  - (a) Comment nomme-t-on l'effet associé à ce décalage ? Citer quelques exemples simples où ce phénomène est perceptible.
  - (b) Si la vitesse des atomes dans le référentiel du laboratoire est  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ , quelle doit être la pulsation  $\omega$  du laser dans ce référentiel pour que les atomes, de pulsation propre  $\omega_0$ , soient à résonance avec le laser ?
  - (c) En déduire le signe du désaccord  $\delta$  pour rester à résonance. Comparer  $|\delta|$  et  $\omega_0$  pour le rubidium. Conclusion ?
3. Exprimer la force  $\mathcal{F}$  s'exerçant sur un atome en mouvement à vitesse  $v$  à partir de l'équation (1) en tenant compte de l'effet précédent.
4. Représenter sommairement la norme de  $\mathcal{F}$  en fonction de la vitesse atomique  $v$  pour une interaction résonnante avec des atomes de vitesse  $u$ . Quelle est la largeur caractéristique de cette courbe pour les atomes de rubidium étudiés ? Evaluer cette largeur pour la longueur d'onde  $\lambda = 780$  nm.
5. Si le laser est accordé pour des atomes sortant du four avec la vitesse  $u$ , que va-t-il se passer ?
6. Pour remédier à ce problème, on peut utiliser l'effet Zeeman. Proposer une configuration utilisant par exemple un solénoïde placé à la sortie du four pour ralentir les atomes en gardant la fréquence du laser fixe.
7. Déterminer la distance minimale nécessaire à stopper un jet atomique en supposant que le maintien à résonance est ainsi assuré est que l'intensité du laser est  $I = I_{\text{sat}} = 1,6$  mW.cm $^{-2}$ . La décélération maximale à résonance sera notée  $\gamma_{\text{max}}$ , on rappelle que  $\Gamma/2\pi = 6$  MHz et que  $\lambda = 780$  nm.

## 2.2 Refroidissement des atomes

Nous venons de voir qu'il est possible de ralentir un jet d'atomes grâce à un faisceau laser, c'est-à-dire de diminuer la vitesse moyenne des atomes du jet. En revanche, pour refroidir une assemblée d'atomes, il faut diminuer la largeur de la fonction de répartition statistique des vitesses autour de cette valeur moyenne.

1. Superposer sur un même graphe la statistique de distribution de la composante suivant  $Oz$  de la vitesse, d'une part à la sortie du four, d'autre part après la combinaison des processus de ralentissement et de refroidissement.
2. Refroidissement unidimensionnel : on éclaire les atomes avec deux faisceaux lasers de même intensité  $I$  et de même pulsation  $\omega$ , accordés en-dessous de la pulsation atomique ( $\delta < 0$ ). Ils se propagent en sens opposés, suivant l'axe  $Oz$ , et leur vecteur d'onde dans le référentiel du laboratoire sont respectivement  $\mathbf{k}_1 = k_1\mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{k}_2$ , avec  $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$  (figure (2)). Dans cette partie, on ne tient pas compte des effets d'interférence entre les deux

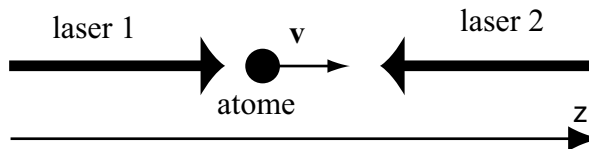


FIG. 2 – Refroidissement unidimensionnel

ondes. On admet que les effets des deux ondes planes sur un atome *en mouvement* se superposent, et donc que les pressions de radiation associées aux deux ondes s’ajoutent. Cette assertion se justifie par un calcul que nous n’effectuerons pas.

- En supposant que  $|\delta| \ll \omega$ , donner les expressions des forces  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  associées à l’action des lasers (1) et (2) sur un atome de vitesse  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ .
- En supposant que la force  $\mathcal{F}$  qui s’exerce sur l’atome est la somme des forces précédentes, tracer la composante  $\mathcal{F}_z$  de  $\mathcal{F}$  suivant  $\mathbf{e}_z$  en fonction de la vitesse atomique  $v$ .
- Quelle est la largeur  $\Delta v_{\text{cap}}$  de la plage dite “de capture” de vitesse ? Expliquer cette dénomination.
- Décrire qualitativement l’évolution de la vitesse d’un atome ayant une vitesse initiale  $v$  dans la plage de capture.
- A partir d’un développement limité de la force  $\mathcal{F}$  au voisinage de  $v = 0$ , montrer que l’on peut écrire :

$$\frac{dv}{dt} = -\xi v \quad \text{avec} \quad \xi = -4\delta \frac{\hbar k^2 \Gamma}{M} \frac{I}{2 I_{\text{sat}}} \frac{\Gamma^2/4}{(\delta^2 + \Gamma^2/4)^2}.$$

- Quelle est, en fonction de  $\delta$ , la plus grande constante d’amortissement des vitesses, notée  $\xi_{\text{max}}$ , obtenue avec un laser fonctionnant à intensité  $I = I_{\text{sat}}$  ? On prendra  $M = 1,42 \cdot 10^{-25}$  kg et  $\lambda = 780$  nm.
  - Quelle est l’influence d’un changement de signe du désaccord  $\delta$  ?
3. **Température minimale** : on souhaite trouver la température minimale d’équilibre d’un gaz d’atomes soumis à ce processus de refroidissement. On admet que cette température  $T_{\text{equ}}$  est définie à partir de la quantité de mouvement quadratique moyenne à l’équilibre :

$$\frac{\langle p^2 \rangle_{\text{equ}}}{2M} = \frac{k_B T_{\text{equ}}}{2},$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann. L’équilibre résulte ici de la compétition entre le refroidissement étudié à la question précédente et la diffusion de la quantité de mouvement due, entre autres, à l’émission spontanée.

(a) *Refroidissement* :

- A partir des résultats précédents, montrer que :

$$\left( \frac{dp^2}{dt} \right)_{\text{refr}} = -2\xi p^2.$$

- Quelle serait la température obtenue si seul ce processus entraient en compte ?

(b) *Diffusion due à l’émission spontanée* : à chaque cycle d’absorption et d’émission spontanée de photons, la quantité de mouvement  $\mathbf{p}$  de l’atome varie de manière aléatoire, conduisant à une “marche au hasard” dans l’espace des impulsions.

- i. Quelle est l'influence de la diffusion de la quantité de mouvement sur la répartition des vitesses ?
- ii. Quel est le pas  $\Delta p$  de la marche au hasard associée à l'émission spontanée dans l'espace des impulsions ?
- iii. Quelle est l'expression de la durée  $\tau$  d'un pas (on prendra garde au fait que l'atome est éclairé par deux lasers d'intensité  $I$ ) ? On pourra faire référence à la question 3(c)iii de la section 1.2.
- iv. On admet que sous l'effet de cette diffusion, à laquelle s'ajoute une diffusion liée aux fluctuations du nombre de photons dans les champs laser, la distribution statistique de  $p$  tend, à la limite d'un grand nombre d'événements, vers une distribution gaussienne :

$$\mathcal{P}(p, t > 0) = \mathcal{A} \exp\left(-\frac{p^2 \tau}{4\hbar^2 k^2 t}\right),$$

où  $\mathcal{A}$  est une constante de normalisation. Montrer que :

$$\left(\frac{d\langle p^2 \rangle}{dt}\right)_{\text{diff}} = \frac{2\hbar^2 k^2}{\tau}.$$

- (c) En se plaçant à  $I = I_{\text{sat}}$  pour les deux lasers, déduire des résultats précédents que la quantité de mouvement quadratique moyenne à l'équilibre est donnée par :

$$\langle p^2 \rangle_{\text{equ}} = -M \hbar \frac{\delta^2 + \Gamma^2/4}{2\delta}.$$

- (d) En déduire la température  $T_{\text{equ}}$  pour un gaz d'atomes à l'équilibre.
- (e) Pour quel désaccord  $\delta_{\text{min}}$  cette température est-elle minimale ? Calculer numériquement cette température  $T_{\text{min}}$  pour le rubidium.
- (f) Quelle serait la température minimale atteinte pour un refroidissement tridimensionnel, obtenu grâce à trois paires de lasers disposées suivant les trois axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  ?
- (g) Les expériences réalisées sur le rubidium ont montré que la température minimale atteinte est de l'ordre de  $2 \mu\text{K}$ . Conclusion ?
- (h) Au terme de cette étude sur le ralentissement et le refroidissement des atomes, les grands principes de la Physique concernant l'énergie, la quantité de mouvement et l'entropie sont-ils satisfaits ?

## 3 Piégeage d'atomes neutres

### 3.1 Piégeage magnétique :

Le processus de piégeage est de nature magnétique sur un atome paramagnétique doté d'un moment dipolaire magnétique  $\boldsymbol{\mu}$  interagissant avec un champ magnétostatique inhomogène.

1. Pourquoi les atomes alcalins sont-ils paramagnétiques ?
2. Quelle est l'énergie d'interaction  $W$  entre un atome porteur d'un moment dipolaire magnétique  $\boldsymbol{\mu}$  et un champ magnétique  $\mathbf{B}$  ?
3. Dans la situation expérimentale envisagée, l'atome se déplace suffisamment lentement pour que la vitesse de rotation du champ  $\mathbf{B}$  dans son référentiel propre soit très inférieure à la fréquence de précession de Larmor autour du champ. Dans cette situation, le moment magnétique  $\boldsymbol{\mu}$  reste constamment aligné avec  $\mathbf{B}$  au cours de son mouvement.



- En considérant un moment magnétique respectivement parallèle puis antiparallèle au champ magnétique, établir les deux expressions possibles pour l'énergie potentielle d'interaction, notées respectivement  $W_-$  et  $W_+$  en fonction de  $\mu_B = \|\boldsymbol{\mu}\|$  et  $B = \|\mathbf{B}\|$ .
- Préciser la stabilité de ces deux configurations et indiquer quelle solution il serait préférable de choisir pour réaliser un piège à atomes. Dans quelle zone de l'espace aurait alors lieu le piégeage ?
- La théorème de Wing interdit l'existence d'un maximum local de la norme  $B$  d'un champ magnétostatique. Conclusion ?
- Si l'on souhaite piéger les atomes dans un champ magnétique inhomogène, quelle doit être la configuration relative du champ et du moment magnétique des atomes ? Quels problèmes cela peut-il poser ? Pourquoi le champ  $\mathbf{B}$  ne doit-il pas s'annuler dans le piège ?

### 3.2 Piège de Ioffé-Pritchard.

*Cette partie peut être traitée de manière indépendante*

Le piège de Ioffé-Pritchard se compose de quatre fils verticaux, passant par les quatre sommets d'un carré dans le plan  $(xOy)$  et parcourus par des courants valant soit  $I$  soit  $-I$  (figure (3)). Ces fils créent un champ magnétique noté  $\mathbf{B}_f$ . A ces fils, on ajoute deux bobines circulaires identiques parcourues par le même courant  $I'$ , centrées sur l'axe  $Oz$ , axe de symétrie des quatre fils. Ces deux bobines sont situées de part et d'autre du plan  $(xOy)$ , à la même distance de ce plan. Ces bobines créent un champ magnétique noté  $\mathbf{B}_b$ . Le centre du piège magnétique résultant de l'addition de  $\mathbf{B}_f$  et  $\mathbf{B}_b$  se situe au centre du repère  $Oxyz$ .

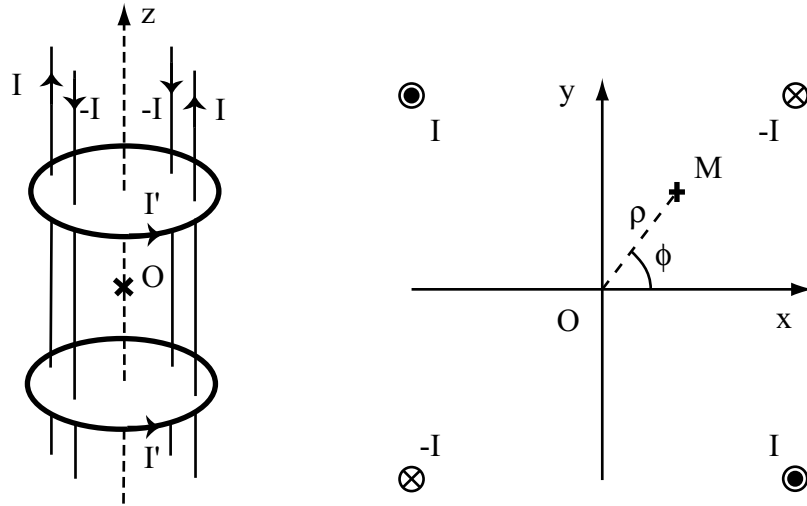


FIG. 3 – Piège de Ioffé-Pritchard

- Comment faut-il positionner les bobines par rapport à la configuration de Helmholtz pour obtenir un extremum local de  $B$  permettant de piéger les atomes en  $O$  ?
- Au voisinage de l'axe, les composantes du champ créé par les fils s'écrivent, en coordonnées cylindriques :

$$B_{f,\rho} = C_2 \rho \cos(2\phi), \quad B_{f,\phi} = -C_2 \rho \sin(2\phi), \quad B_{f,z} = 0.$$

Les composantes cylindriques du champ des bobines valent, quant à elles, au voisinage du centre :

$$B_{b,\rho} = -C_3 z \rho, \quad B_{b,\phi} = 0, \quad B_{b,z} = C_1 + C_3 \left( z^2 - \frac{\rho^2}{2} \right).$$

- (a) Vérifier que le champ magnétique total obéit aux équations de Maxwell.
- (b) Calculer  $\mathbf{B}^2$  à l'ordre 2 en  $z$  et  $\rho$ .
- (c) Quel est le signe de  $C_1$  si  $I' > 0$  ?
- (d) De quel signe doit être  $C_3$  pour assurer un confinement axial ?
- (e) Montrer que le confinement radial impose  $C_2 > \sqrt{C_1 C_3}$ .
- (f) Montrer que l'énergie magnétique  $W$  s'écrit, pour un atome piégé :

$$W = \mu_B \left[ C_3 z^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{C_2^2}{C_1} - C_3 \right) \rho^2 \right]. \quad (2)$$

- (g) En déduire les expressions des pulsations  $\omega_\rho$  et  $\omega_z$  associées à ce potentiel harmonique en fonction des paramètres du problème pour des atomes de masse  $M$ .
- (h) Application numérique. On donne les valeurs suivantes pour les constantes du problème :  $C_1 = 10^{-3}$  T,  $C_2 = 4,9$  T.m<sup>-1</sup> et  $C_3 = 121$  T.m<sup>-2</sup>, et on rappelle que  $M = 1,42 \cdot 10^{-25}$  kg pour le rubidium. En déduire les valeurs des fréquences  $\omega_\rho/2\pi$  et  $\omega_z/2\pi$ .

## Deuxième partie

# Condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique

## 1 Condensation dans un potentiel tridimensionnel isotrope

Dans cette partie, la C.B.E. est abordée d'un point de vue thermodynamique en supposant que le nuage d'atomes constitue un gaz parfait. On néglige donc, dans cette partie, toute interaction entre les atomes. Les atomes considérés sont des *bosons* et on suppose qu'ils sont tous dans le même état quantique interne. Ils sont piégés dans un potentiel *harmonique tridimensionnel isotrope*, c'est-à-dire que la constante de raideur du potentiel est la même dans les trois directions de l'espace. Cette raideur est associée à une pulsation notée  $\omega$ . Aux températures atteintes après une étape supplémentaire de refroidissement, appelée refroidissement évaporatif, les effets quantiques sont importants. Néanmoins, et c'est une hypothèse essentielle dans la suite du problème, la température  $T$  du gaz d'atomes vérifie en permanence :

$$k_B T \gg \hbar\omega,$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann.

L'étude suivante est menée avec un nombre total d'atomes  $N$  fixe et la C.B.E. est atteinte en diminuant la température du gaz d'atomes. Bien que le gaz ne soit pas en contact avec un réservoir de particules, les calculs sont effectués dans le formalisme de l'ensemble grand canonique. Les résultats obtenus sont corrects à condition que le nombre d'atomes soit grand, ce qui sera supposé dans toute la suite du problème. Dans l'ensemble grand canonique, les bosons obéissent à la statistique de Bose-Einstein :

$$f(E) = \frac{1}{\exp[\beta(E - \mu)] - 1}, \quad (3)$$

où  $\mu$  désigne le potentiel chimique et  $\beta = 1/(k_B T)$ . On introduit la fugacité  $\Lambda$ , définie par  $\Lambda = \exp(\beta\mu)$ . On recommande d'utiliser  $\Lambda$  plutôt que le potentiel  $\mu$  chaque fois que cela est possible, en particulier lors du calcul de l'énergie interne.

### 1.1 Populations de l'état fondamental et des états excités

La résolution de l'équation de Schrödinger pour un potentiel harmonique isotrope caractérisé par une pulsation  $\omega$  fournit les niveaux d'énergie suivants :

$$E(n_x, n_y, n_z) = (n_x + n_y + n_z)\hbar\omega,$$

où  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  sont des entiers naturels. Dans cette expression l'énergie du niveau fondamental a été choisie comme origine des énergies. On peut réécrire cette expression sous la forme :

$$E(n) = n\hbar\omega,$$

où  $n$  est un entier naturel, à condition de tenir compte de la dégénérescence  $g(n)$  du  $n^{\text{ieme}}$  niveau.

1. Le niveau fondamental est-il dégénéré? Calculer sa population  $N_0$  en fonction de  $\Lambda$ .

2. En déduire que le potentiel chimique  $\mu$  est toujours négatif.
3. Montrer que la dégénérescence  $g(n)$  du  $n^{ieme}$  niveau est donnée par :

$$g(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

4. En déduire que la densité d'états  $\rho$  dans le piège harmonique tridimensionnel peut s'écrire sous la forme d'une fonction continue de l'énergie :

$$\rho(E) = \rho_1(E) + \rho_2(E) + \rho_3(E) \quad \text{avec} \quad \rho_1(E) = \frac{1}{\hbar\omega}, \quad \rho_2(E) = \frac{3}{2} \frac{E}{(\hbar\omega)^2} \quad \text{et} \quad \rho_3(E) = \frac{1}{2} \frac{E^2}{(\hbar\omega)^3}.$$

5. **Calcul de la population des états excités** : on admet que la population totale  $N_e$  des états excités est donnée par :

$$N_e = N_{1e} + N_{2e} + N_{3e} = \int_{\hbar\omega/2}^{\infty} \rho_1(E) f(E) dE + \int_0^{\infty} \rho_2(E) f(E) dE + \int_0^{\infty} \rho_3(E) f(E) dE,$$

la borne de la première intégrale devant être choisie égale à  $\hbar\omega/2$  pour obtenir le nombre correct de niveaux. Dans les deux questions suivantes, on pourra utiliser les développements en séries entières rappelés dans le préambule de l'énoncé.

- (a) Montrer que la première intégrale conduit à :

$$N_{1e} = -\frac{k_B T}{\hbar\omega} \ln \left[ 1 - \Lambda \exp \left( -\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) \right].$$

- (b) Calculer  $N_{2e}$  et  $N_{3e}$ , et en déduire l'expression de  $N_e$ .
- (c) On suppose dans la suite du problème que, quelque soit la température  $T$ , l'hypothèse fondamentale  $k_B T \gg \hbar\omega$  est vérifiée. En déduire que la population totale des états excités peut s'écrire avec une bonne approximation sous la forme :

$$N_e = \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(\Lambda),$$

où  $g_3$  est la fonction de Bose définie en préambule de l'énoncé.

## 1.2 Condensation.

A partir des calculs précédents, on écrit le nombre total d'atomes  $N$  sous la forme :

$$N = \frac{\Lambda}{1 - \Lambda} + \left( \frac{k_B T}{\hbar\omega} \right)^3 g_3(\Lambda). \quad (4)$$

Au-dessus de la température de condensation, la population  $N_e$  des états excités est très supérieure à celle de l'état fondamental, donnée par le premier terme de (4). On diminue alors progressivement la température  $T$  de l'assemblée d'atomes, et on convient que la C.B.E. se manifeste par un peuplement macroscopique de l'état fondamental en dessous d'une température critique notée  $T_c$ .

1. Montrer que, pour une température donnée  $T$ , le second terme de l'équation (4) est majoré, et donner l'expression du majorant de ce terme.
2. En déduire que lorsque la température tend vers  $T_c$  par valeur supérieure, la fugacité  $\Lambda$  tend vers 1. On rappelle que le nombre d'atomes  $N$  est fixe dans cette analyse.

3. En déduire que la température critique  $T_c$  vérifie l'équation suivante :

$$N = \left( \frac{k_B T_c}{\hbar \omega} \right)^3 g_3(1).$$

Cette relation définit le seuil de condensation.

4. Montrer que si l'on continue à abaisser la température, la population de l'état fondamental  $N_0$  devient macroscopique.
5. Pour  $T < T_c$ , exprimer puis représenter  $N_0/N$  en fonction de  $T/T_c$ .
6. Applications numériques. En prenant  $N = 10^6$  atomes et  $\omega = 10^3$  rad.s<sup>-1</sup> :
- Calculer  $T_c$ .
  - Evaluer le rapport  $k_B T_c / \hbar \omega$  et conclure sur l'hypothèse fondamentale de ce modèle.
  - Estimer le rapport  $N_1/N_0$  lorsque  $N_0 = N/2$ ,  $N_1$  désignant la population totale du premier état excité. Quelle valeur aurait ce rapport si la distribution des populations sur les états d'énergie obéissait à la statistique de Boltzmann ? Conclure.
7. La limite thermodynamique consiste à passer d'un système de taille finie microscopique à un système macroscopique en conservant la densité de particules constante. Ici, on admettra que le passage à la limite thermodynamique consiste à faire tendre  $N$  vers l'infini et  $\omega$  vers 0 en maintenant le produit  $N\omega^3$  constant. La température critique  $T_c$  est-elle modifiée lorsque l'on passe à la limite thermodynamique ?

### 1.3 Energie interne totale :

Pour des bosons, on admet que la fonction de partition  $Z_G$  est donnée par :

$$Z_G = \prod_p \frac{1}{1 - \Lambda \exp(-\beta E_p)},$$

le produit portant sur l'ensemble des états microscopiques d'énergie  $E_p$ .

1. Montrer, en utilisant un développement en série, que :

$$\ln(Z_G) = -\ln(1 - \Lambda) + \left( \frac{k_B T}{\hbar \omega} \right)^3 g_4(\Lambda).$$

On pourra transformer la somme en intégrale, en prenant soin de séparer la contribution de l'état fondamental de celle des états excités. Dans l'expression de la densité d'états  $\rho(E)$ , on ne conservera que le terme dominant  $\rho_3(E)$ .

2. A condition de choisir comme variables thermodynamiques indépendantes  $\Lambda$ ,  $\beta$  et  $N$ , l'énergie interne  $U$  est donnée par la relation :

$$U = - \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln(Z_G)) \right]_{N, \Lambda}.$$

Montrer que  $U$  vérifie :

$$U(T \leq T_c) = 3k_B T N \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \frac{g_4(1)}{g_3(1)} \quad \text{et} \quad U(T \geq T_c) = 3k_B T N \frac{g_4(\Lambda)}{g_3(\Lambda)}.$$

3. Déterminer  $U$  lorsque  $T \gg T_c$ . Interpréter le résultat à partir du théorème d'équipartition.

4. **Capacité thermique** : on définit la capacité thermique  $C$  du système par :

$$C = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_N.$$

Notez que la fugacité  $\Lambda$  n'est pas fixée dans cette expression et qu'elle dépend donc de la température  $T$ .

- (a) Calculer  $C$  pour  $T > T_c$  et pour  $T < T_c$ .
- (b) Montrer que  $C$  subit une discontinuité à  $T = T_c$  égale à  $9Nk_B g_3(1)/g_2(1)$ .
- (c) Quel est l'ordre de la transition d'état associée à la C.B.E. ?

## 2 Description et excitations du condensat

La C.B.E. s'accompagnant d'un confinement spatial des atomes, les interactions entre les  $N$  particules ne sont plus négligeables. Dans cette partie, ces interactions sont prises en compte par un modèle de champ moyen, et l'équation de Schrödinger appliquée au condensat conduit à l'équation de Gross-Pitaevskii. Sauf notification de l'énoncé, les atomes sont confinés dans un piège harmonique tridimensionnel isotrope caractérisé par une pulsation  $\omega$ . On note  $\phi(\mathbf{r}, t)$  la fonction d'onde du condensat et on adopte la condition de normalisation :

$$\int_{\text{condensat}} |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 d\mathbf{r} = N.$$

Dans le cadre de cette normalisation,  $|\phi(\mathbf{r}, t)|^2$  est la densité d'atomes  $n(\mathbf{r}, t)$  dans le condensat.

### 2.1 Equation de Gross-Pitaevskii stationnaire, limite de Thomas-Fermi

Dans le cas d'un problème indépendant du temps, on admet que la fonction d'onde  $\phi(\mathbf{r}, t)$  obéit à l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire :

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \phi(\mathbf{r}) + V_{\text{ext}} \phi(\mathbf{r}) + G |\phi(\mathbf{r})|^2 \phi(\mathbf{r}) = \mu \phi(\mathbf{r}). \quad (5)$$

Le potentiel  $V_{\text{ext}}$  est le potentiel de piégeage,  $M$  la masse d'un atome,  $G$  une constante de couplage positive, et  $\mu$  désigne le potentiel chimique. On se place à la limite de Thomas-Fermi, qui consiste à négliger le terme d'énergie cinétique devant celui modélisant les interactions dans l'équation (5).

1. Expliciter le potentiel  $V_{\text{ext}}$  en fonction de  $M$  et  $\omega$ .
2. Dans l'approximation de Thomas-Fermi, calculer  $\phi(\mathbf{r})$ .
3. Calculer et représenter la densité  $n(\mathbf{r})$  dans la condensat. Définir le rayon  $r_0$  du condensat.
4. Calculer le potentiel chimique  $\mu$  du condensat à partir de la condition de normalisation ( $\mu$  est positif dans cette partie).
5. En déduire l'expression de l'énergie  $E$  du condensat.
6. La figure 4 représente la densité atomique mesurée dans un condensat en fonction de l'altitude  $z$ . Dans cette expérience, la pulsation suivant  $z$  était  $\omega/2\pi = 20$  Hz, et le condensat contenait environ  $N = 80\,000$  atomes.
  - (a) On a également porté sur ce graphe un ajustement des points expérimentaux par une parabole inversée. Le résultat vous semble-t-il conforme à celui attendu ? En traits pointillés, on a porté le profil de densité de l'état fondamental d'un condensat dans un piège harmonique *en négligeant les interactions*. Commentaire ?

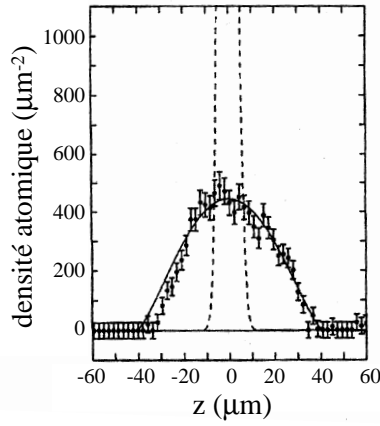


FIG. 4 – Densité atomique dans un condensat contenant 80 000 atomes de sodium en fonction de l’altitude  $z$  (points noirs avec barres d’erreur). En trait plein, ajustement par une parabole inversée. En traits pointillés, profil de densité de l’état fondamental d’un condensat dans un piège harmonique sans interactions.

- (b) Déduire du graphe le rayon  $r_0$  du condensat.
  - (c) En déduire la valeur du potentiel chimique  $\mu$  du condensat. Les atomes étaient des atomes de sodium, dont la masse est  $M = 3,91 \cdot 10^{-26}$  kg.
  - (d) Déterminer la valeur de l’énergie  $E$  du condensat.
7. A partir de graphes similaires obtenus pour des condensats contenant un nombre croissant d’atomes, les résultats suivants ont été obtenus pour l’énergie par atome  $E/N$  :

$N/10^6$	0,08	0,1	0,3	1,1	1,3	1,6	2,3	3,2	4,1
$E/(N k_B)(nK)$	26	30	52	85	92	100	118	130	140

Vérifier à partir de ces données la dépendance de l’énergie  $E/N$  vis-à-vis du nombre d’atomes  $N$  dans le condensat. On pourra par exemple construire un graphe sur le feuillet annexe de l’énoncé, à rendre avec la copie.

## 2.2 Equation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps

On étend l’équation (5) aux problèmes dépendant du temps grâce à l’équation suivante, appelée équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \phi(\mathbf{r}, t) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) + G |\phi(\mathbf{r}, t)|^2 \phi(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

On suppose que  $V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t)$  peut se décomposer en deux termes, l’un statique et l’autre dynamique apparaissant comme une perturbation du potentiel statique :

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}, t) = V_0(\mathbf{r}) + \delta V(\mathbf{r}, t).$$

1. On désigne par  $\phi_0(\mathbf{r})$  la solution de l’équation (6) dont le terme d’énergie potentielle extérieure se limite à  $V_0(\mathbf{r})$ . On cherche une solution de l’équation (6) sous forme d’un produit d’une fonction des variables d’espace et d’une fonction du temps. Montrer qu’alors :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) \exp\left(-i \frac{\mu t}{\hbar}\right).$$

2. **linéarisation** : si la perturbation  $|\delta V|$  vérifie  $|\delta V(\mathbf{r}, t)| \ll |V_0(\mathbf{r})|$ , on suppose que la solution du problème “perturbé” s’écrit :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \tilde{\phi}(\mathbf{r}, t) \exp\left(-i\frac{\mu t}{\hbar}\right) \quad \text{avec} \quad \tilde{\phi}(\mathbf{r}, t) = \phi_0(\mathbf{r}) + \delta\phi(\mathbf{r}, t).$$

Montrer que le vecteur  $(\delta\phi, \delta\phi^*)$  vérifie l’équation linéaire suivante :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\phi^* \end{pmatrix} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \delta\phi \\ \delta\phi^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S \\ -S^* \end{pmatrix}.$$

L’étoile désigne dans les équations précédentes le complexe conjugué,  $\mathcal{L}$  est une matrice  $(2 \times 2)$  indépendante du temps :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} H_0 - \mu + 2G|\phi_0(\mathbf{r})|^2 & G\phi_0^2(\mathbf{r}) \\ -G\phi_0^{*2}(\mathbf{r}) & -(H_0 - \mu + 2G|\phi_0(\mathbf{r})|^2) \end{pmatrix}, \quad H_0 = -\frac{\hbar^2}{2M}\Delta(\cdot) + V_0(\mathbf{r})$$

et  $S = \delta V(\mathbf{r}, t)\phi_0(\mathbf{r})$  un terme source.

3. **Excitations élémentaires** : le potentiel perturbateur  $\delta V$  est appliqué pendant une phase d’excitation de durée finie, puis on le coupe brutalement et on laisse le condensat évoluer. Pour simplifier le problème, et dans cette question seulement, on suppose le condensat homogène (de densité  $n_0$  constante) dans une boîte cubique de côté  $L$ . La fonction d’onde décrivant le condensat est alors  $\phi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{N/L^3}$  et le potentiel chimique est donné par :  $\mu = n_0 G$ . On cherche une solution du système obtenu dans la question précédente de la forme :

$$\delta\phi = u \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)],$$

$u$  étant un nombre complexe.

- (a) Montrer que l’on obtient la relation de dispersion suivante pour les excitations élémentaires :

$$\omega(k) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2M} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2M} + 2n_0 G \right)}.$$

- (b) Représenter  $\omega(k)$  et discuter le résultat précédent en envisageant notamment deux limites. Préciser, en justifiant, la notion de “limite acoustique” attribuée à l’une d’elles, et en déduire la célérité  $c$  du son dans le condensat.

## 2.3 Analogies hydrodynamiques.

Dans cette partie, le condensat est à nouveau placé dans un piège harmonique isotrope, et on écrit la fonction d’onde du condensat sous la forme :

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} \exp(iS(\mathbf{r}, t)). \quad (7)$$

1. A partir de l’équation (6), montrer que :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} n = -\frac{\hbar^2}{2M} [\phi^* \Delta \phi - \phi \Delta \phi^*].$$

2. En déduire l’équation suivante sur la densité  $n$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \operatorname{div} \left[ n \left( \frac{\hbar}{M} \mathbf{grad} S \right) \right] = 0. \quad (8)$$

Par analogie avec une équation de conservation, proposer une expression pour le champ des vitesses  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  dans le condensat.



3. Etablir les équations suivantes :

$$2in \frac{\partial S}{\partial t} = \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad \text{et} \quad \hbar \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta(\sqrt{n}) - \frac{\hbar^2}{2M} (\mathbf{grad}(S))^2 - V_{\text{ext}} - Gn.$$

En déduire que :

$$M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{grad} \left( -\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta(\sqrt{n}) - \frac{1}{2} M \mathbf{v}^2 - V_{\text{ext}} - Gn \right). \quad (9)$$

Quelle est l'analogie de l'équation (9) en hydrodynamique classique, si l'on oublie le terme dit de "pression quantique"  $-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta(\sqrt{n})$  ?

4. Dans le cas des faibles excitations, et en supposant que la densité  $n$  est peu modifiée, on propose de linéariser les équations (8) et (9) en supposant le terme de pression quantique négligeable. On introduit pour cela les corrections  $\delta n$  et  $\delta \mathbf{v}$  aux valeurs d'équilibre  $n$  et  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$ .
- Simplifier le système d'équations couplées (8) et (9), et donner l'équation aux dérivées partielles vérifiées par  $\delta n$ .
  - Dans le cas d'un condensat homogène ( $n_0(\mathbf{r}) = n_0$  dans un condensat sphérique de rayon  $r_0$ ), montrer que cette équation se ramène à une équation de d'Alembert, dans laquelle apparaît la célérité  $c$ .
  - Comparer ce résultat à celui obtenu pour la célérité dans la partie précédente.
  - Calculer numériquement la constante de couplage  $G$  pour une célérité acoustique  $c = 3,2 \text{ mm.s}^{-1}$ . Le rayon du condensat  $r_0$  est égal à  $10 \mu\text{m}$  et il contient  $10^6$  atomes.